**Тема 3 . Проверка гипотез о параметрах распределения. Проверка гипотез о законе распределения**

***Задание 3.1***

**1.** Из большой партии изделий берут на пробу *n=4* изделия*.* Известно, что доля дефектных изделий во всей партии равна *.* Провели серий испытаний и получили эмпирическое распределение (данные приведены в таблице: в первой строке указаны варианты; в первом столбце даны значения признака, число опытов и вероятность «успеха»):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ вар.** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 102 | 131 | 97 | 63 | 96 | 138 | 120 | 143 | 120 | 104 |
| 1 | 131 | 99 | 114 | 106 | 137 | 96 | 104 | 112 | 131 | 66 |
| 2 | 54 | 31 | 71 | 40 | 30 | 23 | 35 | 14 | 80 | 23 |
| 3 | 6 | 5 | 16 | 18 | 15 | 9 | 6 | 9 | 18 | 6 |
| 4 | 7 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 | 5 | 2 | 1 | 1 |
|  | 300 | 270 | 300 | 230 | 280 | 270 | 270 | 280 | 350 | 200 |
|  | 0.18 | 0.17 | 0.23 | 0.24 | 0.19 | 0.14 | 0.14 | 0.21 | 0.22 | 0.17 |

При уровне значимости  проверить нулевую гипотезу о *биномиальном распределении.* На одной координатной плоскости построить полигоны частот для эмпирического и теоретического распределений. Сравнить.

**2.** Доля дефектных деталей составляет . Производится 75 испытаний и 320 таких серий. Получили эмпирическое распределение признака X-числа дефектных изделий:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | N | 1+ N | 2+ N | 3+ N | 4+ N |
|  | 145 | 120 | 37 | 11 | 7 |

При уровне значимости  проверить нулевую гипотезу о *распределении Пуассона*. На одной координатной эмпирического и теоретического распределений. Сравнить.

**3.** При уровне значимости  проверить нулевую гипотезу о *нормальном распределении* генеральной совокупности, если известно эмпирическое распределение исследуемого признака: *n=180*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | N | 1+ N | 2+ N | 3+ N | 4+ N | 5+ N | 6+ N | 7+ N |
|  | 7 | 15 | 37 | 46 | 29 | 21 | 16 | 9 |

***Задание 3.2***

Производитель утверждает, что средний вес пачки чая не меньше *a=*100 г. Инспектор отобрал 10 пачек чая и взвесил. Их вес оказался 90+ N, 100+N, 102+N, 98, 96, 105, 98, 100, 101, 90+N г. соответственно. Не противоречит ли это утверждению производителя? Предполагается, что вес пачек чая распределен нормально. Уровень значимости

***Образец выполнения задания 3.1***

**1.** Из большой партии изделий берут на пробу *n=4* изделия*.* Известно, что доля дефектных изделий во всей партии равна =0,23*.* Провели =300серий испытаний и получили эмпирическое распределение:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 97 | 114 | 71 | 16 | 2 |

При уровне значимости  проверить нулевую гипотезу о *биномиальном распределении*. На одной координатной плоскости построить полигоны частот для эмпирического и теоретического распределений. Сравнить.

***Решение.***

Для проверки гипотезы о биномиальном распределении генеральной совокупности применяем критерий согласия Пирсона, для этого находим хи- квадрат наблюдаемое по формуле: , где -теоретические (выравнивающие) частоты признака X, они равны , где - число серий испытаний, - вероятности значений признака, которые находим по формуле Бернулли: , где n-количество изделий, - значения признака X–число дефектных изделий, *p*-вероятность одного дефектного изделия, - вероятность одного стандартного изделия, при этом . В задачи имеем:



Тогда 









Все данные и полученные результаты занесем в таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0 | 97 | 0,35153 | 105 | 0,609524 |
| 1 | 114 | 0,42001 | 126 | 1,142857 |
| 2 | 71 | 0,18819 | 56 | 4,017857 |
| 3 | 16  18 | 0,03747 | 13  13 | 1,923077 |
| 4 | 2 | 0,00280 | 0 |
|  | 300 | 1 | 300 | 7,693315 |

Из таблицы выписываем 7,693315 и находим . Так как , то группируем , получаем , а тогда , , так как параметр *p* в задаче дан и поэтому не оценивается. Имеем, . Из того, что и по приложению 5 в находим 7.

Так как , то гипотезу о биноминальном распределении генеральной совокупности принимаем.

На одной координатной плоскости построить полигоны частот для эмпирического и теоретического распределений.

Замечаем, что эмпирическое и теоретическое распределения различаются. Поэтому можно сделать вывод, что рассматриваемое эмпирическое распределение не является биномиальным на уровне значимости 0,05.

.Ответ: нулевую гипотезу отвергаем.

**2.** Доля дефектных деталей составляет . Производится 75 испытаний и 320 таких серий. Получили эмпирическое распределение признака X-числа дефектных изделий

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | 145 | 120 | 37 | 11 | 7 |

При уровне значимости  проверить нулевую гипотезу о *распределении Пуассона*. На одной координатной эмпирического и теоретического распределений. Сравнить.

***Решение.***

Для проверки гипотезы о распределении Пуассона генеральной совокупности применяем критерий согласия Пирсона: , где – эмпирические частоты признака X; -теоретические (выравнивающие) частоты признака X, которые равны , где - число серий испытаний, - вероятности значений признака, которые находим по формуле Пуассона: , где - параметр; - значения признака X–числа дефектных изделий.



; ; ; ; ;

Все данные и полученные результаты занесем в таблицу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 145 | 0,509 | 163 | 1,9877 |
| 1 | 1 | 120 | 0,344 | 110 | 0,9091 |
| 2 | 2 | 37 | 0,116 | 37 | 0 |
| 3 | 3 | 11  18 | 0,026 | 8  10 | 6,4 |
| 4 | 4 | 7 | 0,005 | 2 |
| Σ | - | 320 | 1 | 320 |  |

Из таблицы выписываем 9,2968 и находим . Так как , то группируем , получаем , а тогда , , так как параметр *p* в задаче дан и поэтому не оценивается. Имеем, . Из того, что и по приложению 5 в [ ] находим 7

Так как , то гипотезу о распределении Пуассона генеральной совокупности отвергаем.

На одной координатной плоскости построить полигоны частот для эмпирического и теоретического распределений.

Замечаем, что эмпирическое и теоретическое распределения на участке [0;1,5] существенно отличаются. Поэтому можно сделать вывод, что рассматриваемое эмпирическое распределение не является распределением Пуассона.

Ответ: нулевую гипотезу отвергаем.

**3.** При уровне значимости  проверить нулевую гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известно эмпирическое распределение исследуемого признака: *n=180*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|  | 7 | 15 | 37 | 46 | 29 | 21 | 16 | 9 |

***Решение.***

Так как предполагаем, что признак генеральной совокупности распределен нормально, то представим данное эмпирическое распределение в виде распределения частичных интервалов. Для этого шаг разбиения найдем по формуле: , где m - количество частичных интервалов. Для проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности применяем критерий согласия Пирсона: , где – эмпирические частоты признака X; - теоретические (выравнивающие) частоты признака X, они равны , где - число серий испытаний, - вероятности значений признака X. Так как признак X нормально распределенная случайная величина, то для нахождения вероятностей используем формулу:

, где ,

Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение генеральной совокупности неизвестны, поэтому заменяем их оценками:

и .

Все данные и полученные результаты занесем в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 15 | 15 | 1 | 15 |
| 3 | 2 | 37 | 74 | 4 | 148 |
| 4 | 3 | 46 | 138 | 9 | 414 |
| 5 | 4 | 29 | 116 | 16 | 464 |
| 6 | 5 | 21 | 105 | 25 | 525 |
| 7 | 6 | 16 | 96 | 36 | 576 |
| 8 | 7 | 9 | 63 | 49 | 441 |
| Σ |  | 180 | 607 |  | 2583 |

****

.

Все данные и результаты занесем в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 0,875 | 7 | - | -1,44 | -0,5 | -0,4251 | 0,0749 | 13 | 2,7692 |
| 2 | 0,875 | 1,75 | 15 | -1,44 | -0,94 | -0,4251 | -0,3264 | 0,0987 | 18 | 0,5 |
| 3 | 1,75 | 2,625 | 37 | -0,94 | -0,43 | -0,3264 | -0,1664 | 0,1600 | 29 | 2,2069 |
| 4 | 2,625 | 3,5 | 46 | -0,43 | 0,08 | -0,1664 | 0,0319 | 0,1983 | 36 | 2,7778 |
| 5 | 3,5 | 4,375 | 29 | 0,08 | 0,58 | 0,0319 | 0,2190 | 0,1871 | 34 | 0,7353 |
| 6 | 4,375 | 5,25 | 21 | 0,58 | 1,09 | 0,2190 | 0,3621 | 0,1431 | 26 | 0,9615 |
| 7 | 5,25 | 6,125 | 16 | 1,09 | 1,59 | 0,3621 | 0,4441 | 0,0820 | 15 | 0,0667 |
| 8 | 6,125 | 7 | 9 | 1,59 | + | 0,4441 | 0,5 | 0,0559 | 9 | 0 |
|  |  |  | 180 |  |  |  |  | 1 | 180 |  |

.

Так как , то гипотезу о нормальном распределении принимаем.

Построим на одной координатной плоскости эмпирическое и теоретическое распределения и сравним между собой.

Замечаем, что эмпирическое и теоретическое распределения достаточно близки. Поэтому можно сделать вывод, что рассматриваемое эмпирическое распределение является нормальным.

Ответ: нулевую гипотезу принимаем.

***Образец выполнения задания 3.2***

Проектный контролируемый размер изделий, изготовляемых станком-автоматом, . Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| контролируемый размер | 34,8 | 34,9 | 5,0 | 35,1 | 5,2 |
| частота (число изделий) | 2 | 3 | 4 | 6 | 5 |

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу при конкурирующей гипотезе .

***Решение.***

Так как дисперсия генеральной совокупности неизвестна, то в качестве критерия используем случайную величину *,* распределенную по закону Стьюдента. Найдем и , используя таблицы Excel. В качестве ложного нуля возьмем С=35, при этом h=0,1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i |  |  |  |  |  |
| 1 | 34,8 | 2 | -2 | -4 | 8 |
| 2 | 34,9 | 3 | -1 | -3 | 3 |
| 3 | 35,0 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 35,1 | 6 | 1 | 6 | 6 |
| 5 | 35,2 | 5 | 2 | 10 | 20 |
|  | - | 20 | - | 9 | 37 |

Так как , то

Так как , то

Вычислим наблюдаемое значение критерия

Так как конкурирующая гипотеза , то имеем двустороннюю критическую область и по приложению 6 находим =

Так как , действительно, 2,19>2,09, то нулевую гипотезу отвергаем.